Las matemáticas vigilan tu salud

Modelos sobre epidemias y vacunas

Clara Grima y Enrique F. Borja

Jot Down Books

NEXT— DOOR... PUBLISHERS

Primera edición: noviembre 2017

Coeditan: Next Door Publishers S.L. y
Wabi Sabi Investments, S.C.

ISBN: 978-84-946669-9-5

Next Door Publishers S.L.
c/ Emilio Arrieta, 5, entlo. dcha., 31002 Pamplona
Tel: 948 206 200
E-mail: info@nextdooreditores.com
www.nextdoorpublishers.com

Impreso por Gráficas Rey
Impreso en España

Diseño de colección: Ex. Estudi
Autora del sciku: Laura Morrón
Dirección general: Oihana Iturbide
Dirección de la colección: Laura Morrón
Corrección y composición: NEMO Edición y Comunicación

Colección
El Café Cajal

Índice

Prólogo

Las matemáticas salvan vidas. Aunque puede que tú, querido lector, estés en desacuerdo con esta afirmación. Tal vez pienses que las matemáticas te arruinaron la vida durante la adolescencia. Pero la verdad es que las matemáticas te mantienen vivo a cada paso que das. Son las matemáticas las que permiten que los arquitectos puedan calcular la carga de los edificios y de este modo evitar que se derrumben. Cuando cruzas un paso de cebra, el semáforo está en verde el tiempo necesario para que puedas cruzar sin que te atropellen. Y, sobre todo, son las matemáticas las que hacen posible que un cajero automático te expenda dinero si te has quedado sin blanca y, tras haber ligado, necesitas comprar preservativos. Como te decía, querido lector, las matemáticas te salvan la vida a diario.

Así pues, cuando Clara y Enrique me pidieron que prologase este libro que tienes en tus manos, o bien que sujetas con una prótesis, en caso de no tener brazos —prótesis que han sido diseñadas y fabricadas gracias a las matemáticas—, sentí una inmensa alegría —las matemáticas me ayudaron a calcular que mi alegría era mayor que cuando me enteré de mi tercer embarazo pero menor que cuando me compré mi última videoconsola; o, como lo expresaríamos matemáticamente, «3.er embarazo < prólogo < videoconsola»—. Me dije que gracias a esa gran matemática que es Clara y a ese gran físico que es Enrique, ambos enormes divulgadores, por fin quedaría demostrado que las matemáticas salvan vidas, y que para lograr tal objetivo se desentrañaría cómo estas intervienen en el campo de la medicina. Eso sí, cuando digo «campo de la medicina», no me refiero a la gente que toma pastillas «cada dos por tres», ni tampoco me refiero a esos exfumadores que se aplican parches de nicotina diciendo que «a la tercera va la vencida», pero luego van a una boda, recaen y «se quedan más anchos que largos». Más bien me refiero a todo lo que la medicina ha logrado aplicando las matemáticas. En breve descubrirás la relación entre estas y la medicina en cuanto a prevención de epidemias y colchón de vacunación, así como el motivo por el que algunas personas, a pesar de las pruebas científicas, optan por prescindir de las vacunas.

Puede que te parezca un tema complicado, pues en efecto lo es, pero los autores lo han explicado de tal modo que podría entenderlo hasta un niño de primaria, e incluso alguien con predisposición a llevar una corona en su cabeza. Partiendo de la base, te mostrarán las matemáticas en toda su sencillez, desnudas, sin ornamentos. Te irán proponiendo ejercicios para que, si así lo deseas, juegues y experimentes con ellas. Y, cuando por fin hayas dominado el concepto, aumentarán paulatinamente la dificultad, envolviendo en capas esa desnudez de las matemáticas para que, en última instancia, puedas entender su complejidad final. Así que permíteme un consejo: este libro es para leerlo con cuaderno, lápiz, goma de borrar y mucha tranquilidad. Solo así podrás disfrutarlo como merece. Y te resultará divertido, créeme. No hay nada como la satisfacción personal de lograr entender algo que siempre se nos ha atragantado, ya sean las matemáticas, ya sea la relación con una suegra. Lo primero se consigue resolviendo ejercicios; y lo segundo, resolviendo divorcios. ¡Qué maravillosa ironía es el divorcio! Una división en la pareja que multiplica la alegría entre ambos. Las matemáticas salvan vidas de forma insospechada, como ves.

Aunque tal vez creas, querido lector, que exagero llevada por mi admiración profesional hacia Clara y Enrique. Por eso debo aclarar que mi amor a las matemáticas se remonta a mi infancia. Y gracias a esta lectura he comprendido que, cuando en aquella época vendía papeletas para el viaje de fin de curso, fue la teoría de grafos la que me permitió llegar a más gente, ya que a cada conocido le daba 10 papeletas para que se las vendiera a sus conocidos. De este modo, el viaje de estudios acabó saliéndome gratis, lo cual equivale a pagar cero euros… ¡Benditas matemáticas!

También las matemáticas me ayudaron en aquella excursión con los *scouts*, cuando saqué una barra de chocolate y todos empezaron a pedirme un trozo. Fue tan sencillo como contar cuántas personas había en el autobús —unas 70— y comprobar que la pastilla de chocolate tenía 12 partes divisibles. Tocábamos a 1 parte por cada 6 personas, más o menos. Gracias a las divisiones matemáticas, aprendí que nunca puedes sacar un dulce en público durante una excursión si no hay suficiente para compartir. Y que los niños de 9 años saben manejar una navaja si de ese modo pueden conseguir chocolate.

Incluso ahora, en mi etapa adulta, disfruto enseñando matemáticas a mis hijos pequeños y, sobre todo, a mi hijo adolescente. Practicar las matemáticas con él me ayuda a aliviar la tensión acumulada durante la semana. Como el otro día, sin ir más lejos, cuando me senté junto a su metro setenta y dos de altura a explicarle las ecuaciones de segundo grado. En un momento dado, harto y frustrado porque no lograba entender mis explicaciones, gritó que para qué narices quería él estudiar ecuaciones. Le di un pescozón. «¡¿Por qué me pegas?!», preguntó él. «Para despejarte la incógnita», respondí ya libre de tensiones.

Gracias a las matemáticas, sé que mis posibilidades de llegar a ser concejal tienden a cero tras este chiste, pero que las simpatías de más de un padre y más de un profesor crecen exponencialmente al imaginarse la escena. Porque, querido lector, las matemáticas también sirven para soñar lo imposible e imaginar lo inimaginable, como estar conectados a través de máquinas que procesan la información en micras de segundo. Y si no, que se lo digan a Ada Lovelace, matemática que vivió menos de 40 años pero que aun así tuvo tiempo, en la primera mitad del siglo XIX, de desarrollar el primer algoritmo cuya finalidad era ser procesado por una máquina. Es decir, que Lovelace fue la primera programadora de ordenadores de la historia. Y pese a su incalculable aportación como matemática, obsérvese su insuficiente popularidad, lo cual nos demuestra algo que todos sabemos: las mujeres siempre tardamos más en hacernos valer y nuestro trabajo suele estar menospreciado y pasar desapercibido. Pues bien, a ese mismo obstáculo se enfrentan las matemáticas, tan integradas en otros campos que parece que no existieran. En cualquier caso, querido lector, ahora vas a descubrir, gracias a Clara y Enrique, que no solo los médicos salvan vidas. A partir de ahora, recordarás con otros ojos a quien te impartía clases de Matemáticas en la escuela. Porque las matemáticas salvan vidas.

Introducción

El libro que tienes en tus manos trata de enfermedades, epidemias y vacunas, como habrás podido deducir del subtítulo. Pero su tema principal es la matemática. Sí, es un libro que tiene por objetivo principal descubrirte qué puede hacer la matemática para salvarnos la vida en lo que a epidemias se refiere.

Por si no te habías dado cuenta, te estamos escribiendo directamente a ti. Sabemos que esta forma de escribir es demasiado «personal», demasiado cercana. El caso es que a nosotros nos gusta escribir así, al contrario de lo que se opina generalmente en el mundo editorial, y por ello desde aquí queremos expresar nuestro más profundo agradecimiento a Laura Morrón, nuestra editora, y a Next Door, por la libertad que nos han dado. También queremos pedir perdón por el atrevimiento de tratarte con tamaña cercanía sin conocernos de nada. Al fin y al cabo, y siendo justos, nosotros estamos exponiendo nuestro conocimiento y nuestro desconocimiento ante un perfecto desconocido. Creemos que por esa parte estamos empatados.

Aquí no vas a encontrar descripciones de enfermedades, ni de síntomas, ni de tratamientos. Lo que está escondido en estas páginas es una breve, y esperamos que amena, introducción a la epidemiología matemática y otras cuestiones relacionadas. Nuestra meta al escribir este libro, así como esperamos la tuya al leerlo, es entender, divertirnos y aprender sobre modelos matemáticos que se aplican al control de la evolución de una enfermedad. Ni más ni menos.

No te preocupes, que nadie te va a examinar tras leer estas páginas. Además, todo lo que necesitas saber para llegar hasta el final está explicado en el libro. Siempre será de agradecer que ya hayas peleado con ecuaciones y demás, pero con que te asegures de leer con el cerebro puesto no debería haber problema alguno. También tienes la opción de acusar a los autores de completos ineptos en caso de que no te enteres de nada, y asunto zanjado.

El asunto que nos traemos entre manos se nos antoja espectacularmente hermoso. Cuando profundices en el libro, descubrirás cómo partiendo de unas ideas muy sencillas se pueden obtener conclusiones muy potentes relacionadas con el comportamiento de las enfermedades. Vas a degustar cómo se despliega todo el poder matemático para enfrentarse a problemas que distan mucho de ser los típicos en los que uno esperaría encontrar fórmulas y ecuaciones. Nos parece prodigioso que podamos hacerlo, y por eso queremos compartirlo contigo.

Hemos estado muy tentados de introducir capítulos sobre distintas enfermedades como la viruela, el sarampión o el ébola y comparar su evolución con lo que aprendemos de los modelos matemáticos. Pero finalmente hemos optado por no hacerlo. Las razones son simples: por un lado, la extensión del libro excedería lo deseable; por otro lado, aquí se van a introducir muchos conceptos e ideas que necesitarán de una breve pero intensa reflexión, con lo que agobiar a nuestros queridos lectores con comparativas entre modelos y realidad se nos antojaba un completo abuso de su tiempo. Tal vez en futuras ediciones retomemos la idea, pero no esta vez.

Como dijo un tal Hawking, cada ecuación o fórmula en un libro de ciencia dirigido al público general divide por dos el número de lectores. Aun así, en este libro hay muchas fórmulas, y están ahí porque nos gusta quedarnos con la mitad de lectores que quieren que les cuenten las cosas como son de verdad, más allá de unos cuantos ejemplos simpáticos, unas alambicadas analogías y varias anécdotas históricas. Aquí solo se habla de matemáticas.

Llegados a este punto, quizá te preguntes cómo consumir este libro. Lo ideal sería que te hicieras con lápiz y papel e intentaras, a las bravas, reproducir los pocos cálculos que hay. Estamos seguros de que se te dibujará una gran sonrisa de satisfacción cuando consigas hilvanar un modelo matemático a tu aire y sin más ayuda que la de este humilde libro.

Sí, sí, sabemos que te mueres de ganas por profundizar en eso de las matemáticas y las enfermedades. Así que no te haremos esperar más. En el libro encontrarás, nada más empezar, cuatro capítulos donde hablaremos de teoría de grafos, teoría de juegos, funciones y ecuaciones diferenciales —aunque no se diga—. Si con esa retahíla de nombres no te mueres de ganas de ir al primer capítulo no sabemos qué más te puede dar el empujón. El objetivo es llenar nuestras mochilas con los conocimientos mínimos necesarios para afrontar la tarea de modelar la evolución de enfermedades con hermosas matemáticas.

El quinto, el sexto y el séptimo capítulo son la esencia del libro. En ellos construiremos —sí, tú también— modelos matemáticos simples para describir cómo evoluciona una enfermedad, cuándo se producen epidemias y si matemáticamente hablando es tan bueno vacunarse como dicen. Empezaremos con modelos simples y luego los trasladaremos a poblaciones estructuradas en forma de grafos.

El octavo capítulo es una maravilla que, sin duda alguna, te sabrá a poco. En él te vas a enfrentar a unas cuantas verdades que probablemente ya has intuido alguna vez, pero que aquí verás bajo una perspectiva matemática. En concreto, nos centraremos en el movimiento antivacunas. Sin alarmismos ni sermones, con matemáticas y poco más.

No te entretenemos más, pues debes de tener ganas de empezar este viaje. Que disfrutes la lectura. Ah, y no olvides pasar por la bibliografía si quieres seguir informándote sobre estos temas.

Capítulo 1: *Mundos pequeños y amigos populares*

Comenzamos nuestro recorrido por esas matemáticas que se encargan de velar por nuestra salud presentando a unos simpáticos objetos matemáticos de apariencia simple pero con una potencia fascinante en el modelado y resolución de problemas, en ocasiones, endiabladamente complicados: los grafos. La teoría de grafos nos brinda una forma de pensar de indudable valor a la hora de entender, por ejemplo, la estructura de las redes sociales en general. Las redes sociales virtuales —como Facebook o Twitter— son elementos omnipresentes en nuestra sociedad actual, pero en realidad una red social puede estar compuesta por las amistades en el patio de un colegio o cualquier conjunto de individuos que se relacionan, dos a dos, siguiendo una determinada norma.

Teoría de grafos: Un aperitivo

La teoría de grafos, en pocas palabras, se ocupa de representar gráfica y ordenadamente las relaciones, dos a dos, entre elementos —individuos— de un determinado conjunto —comunidad—. Formalmente, un grafo es una pareja de conjuntos: un primer conjunto a cuyos elementos llamamos *vértices* o *nodos* y un segundo conjunto cuyos elementos son parejas de vértices del primero, a las que llamamos *aristas* y que representan la existencia de algún tipo de relación entre ambos elementos.

Podemos visualizar un grafo mediante un conjunto de puntos, que representarían los vértices del grafo unidos entre sí por esa serie de líneas llamadas aristas, como se muestra en la figura 1.1.

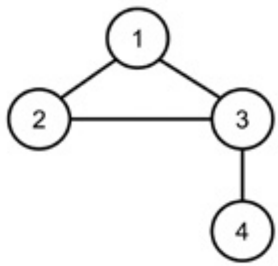

Figura 1.1. Grafo de cuatro vértices y cuatro aristas.

Imaginemos que tenemos cuatro individuos y que queremos ver las relaciones de amistad entre ellos. Los individuos son Ana, Berto, Clara y Daniel. Resulta que Ana es amiga de Berto y Clara. Berto también es amigo de Clara. Por último, Daniel y Clara también son amigos.

Para hacer la cosa más matemática y, por lo tanto, más clara, vamos a utilizar simplemente las iniciales de nuestros protagonistas en la construcción del grafo: Ana se representará por A, Berto por B, Clara por C y Daniel por D. Ahora podemos dar una tabla, como la que se muestra en la figura 1.2, para identificar quién es amigo de quién.

	ANA	BERTO	CLARA	DANIEL
ANA	X	Sí	Sí	No
BERTO	Sí	X	Sí	No
CLARA	Sí	Sí	X	Sí
DANIEL	No	No	Sí	X

Figura 1.2. En esta tabla se muestran las relaciones de amistad entre nuestros cuatro protagonistas. En la diagonal hemos puesto cruces porque no consideramos que nadie sea amigo de sí mismo —no solemos leer a Paulo Coelho—. Esta tabla es una forma de ofrecer el grafo de relaciones entre los individuos de nuestra muestra.

Esta tabla condensa —de forma muy elegante, a nuestro parecer— la relación entre los elementos involucrados en la población que estamos estudiando y nos dice cuál es la relación que cada uno de ellos mantiene con todos los demás. Tal vez podamos expresar esto de una forma más matemática aún. Tan solo vamos a reemplazar los síes por 1 y los noes y cruces por 0, como hemos hecho en la figura 1.3.

	ANA	BERTO	CLARA	DANIEL
ANA	0	1	1	0
BERTO	1	0	1	0
CLARA	1	1	0	1
DANIEL	0	0	1	0

Figura 1.3. Tabla matemática que nos da las relaciones entre los individuos que conforman la población de estudio.

¿Qué tiene que ver esta tabla con eso de los grafos? Bueno, la cosa no puede ser más sencilla. En esta tabla, que los expertos suelen llamar *matriz de adyacencia*, se establecen quiénes son los individuos de la muestra que estamos estudiando y cuáles son las relaciones entre ellos. Podemos disponer los individuos de nuestro estudio como puntos gordos o los vértices de un grafo, la elección es libre, da igual cómo se haga. Nosotros hemos elegido la disposición de la figura 1.4.

	ANA	BERTO	CLARA	DANIEL
ANA	0	1	1	0
BERTO	1	0	1	0
CLARA	1	1	0	1
DANIEL	0	0	1	0

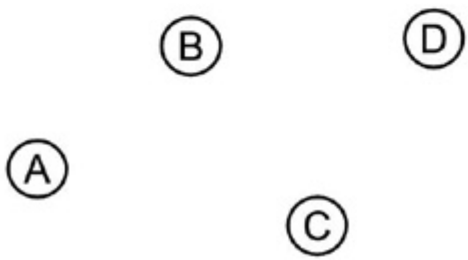

Figura 1.4. Disposición de los nodos del grafo que vamos a construir a partir de la gráfica.

En la figura 1.4 hemos dispuesto los nodos de un grafo. El siguiente paso es plasmar la relación «son amigos» entre los individuos de la comunidad que estamos estudiando. Es evidente que si A es amigo de B, entonces B es amigo de A. La amistad, la de verdad, es una relación mutua entre dos personas. Si en la tabla hay un 1 en la posición (A, B) entonces también debe de haber un 1 en la posición (B, A). Esa relación entre el elemento A y el elemento B se representa en el grafo mediante una arista, una línea, que une dichos nodos. Siguiendo esa regla, el grafo obtenido será el dado por la figura 1.5.

	ANA	BERTO	CLARA	DANIEL
ANA	0	1	1	0
BERTO	1	0	1	0
CLARA	1	1	0	1
DANIEL	0	0	1	0

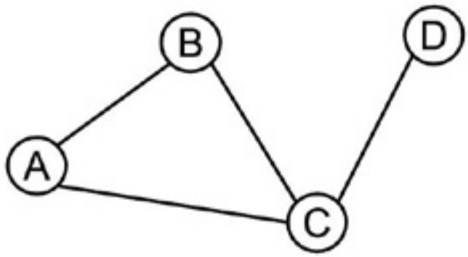

Figura 1.5. Una posible representación del grafo de la tabla.

La posición de los nodos carece de importancia en este contexto, pues lo único que importa aquí es la relación entre los mismos. Lo importante de un grafo no es su forma pictórica —entre otras cosas, porque hay infinidad de formas de representarlo—, sino lo que podríamos llamar su estructura de relaciones, porque es verdad que la información de un grafo está en su tabla de relaciones —o en su matriz de adyacencia, si queremos ser formales—.

Fijémonos en que en el ejemplo que hemos puesto el grafo inicial representado en la figura 1.1 tiene la misma estructura. Un hecho distintivo es que entre los elementos A-B-C aparece un triángulo. Da igual cómo lo representemos, ya que ese triángulo aparecerá independientemente del dibujo concreto que tracemos para el grafo. Ese triángulo es importante porque nos indica que hay una relación de amistad, dos a dos, entre A, B y C; y que cada uno de ellos es amigo de los otros dos. Llegados a este punto, trataremos de corregir un error muy extendido socialmente: en ocasiones, nos referimos a una relación como la mostrada en la figura 1.6 con el término *triángulo amoroso* y, evidentemente, es incorrecto.

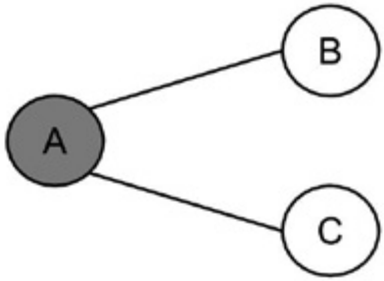

Figura 1.6. Una representación de las relaciones en un mal llamado triángulo amoroso.

En este tipo de relaciones, las de la figura 1.6, en realidad estamos hablando de un grafo amoroso. En concreto, de un $K_{1,2}$ amoroso, que es como se designa matemáticamente a este grafo. Y además, suena más moderno.

Pero sigamos. El tipo de grafo que estamos usando en los ejemplos iniciales se conoce como *grafo no dirigido* o, simplemente, *grafo*, ya que las aristas indican una relación mutua entre los nodos que unen. Esta relación mutua puede ser de amistad, de pertenencia a la misma clase del cole o de coincidencia en el año de nacimiento, por ejemplo. Puede servir cualquier variable que se nos ocurra, siempre que la relación sea mutua y simétrica. Un ejemplo de red social muy conocida con un grafo no dirigido es Facebook, donde se establecen relaciones de «amistad». Y evidentemente, la amistad es una relación simétrica, o al menos eso es lo que nos gusta creer.

A poco que recapacitemos, descubriremos que no todas las relaciones son mutuas ni simétricas. Por ejemplo, podríamos poner el siguiente caso abusando de la amabilidad de nuestros amigos Ana, Berto, Clara y Daniel. Lo que vamos a establecer ahora son las relaciones de admiración —profesional, deportiva o de otro tipo— entre ellos:

Ana admira a Berto y a Clara.
Berto admira a Clara y a Daniel.
Clara solo admira a Berto.
Daniel admira a todos sus compañeros.

Ahora la relación elegida para construir nuestro grafo es «admirar a». Esta relación no tiene por qué ser mutua y simétrica. ¿Te atreves a construir la tabla de relaciones o matriz de adyacencia en este caso? La solución está dada en la figura 1.7 que representa a Ana con la A, a Berto con la B, a Clara con la C y a Daniel con la D.

	A	B	C	D
A	0	1	1	0
B	0	0	1	1
C	0	1	0	0
D	1	1	1	0

Figura 1.7. Esta es la tabla de la relación «admirar a» según las instrucciones dadas en el texto.

Como se observa en la figura 1.7, la estructura de la tabla no es simétrica, como ocurría en el caso anterior, porque la relación elegida tampoco lo es. Para representar gráficamente este tipo de situaciones, hemos de darles a las aristas un sentido, es decir, hemos de indicar de qué nodo sale y a qué nodo llega la arista para indicar el sentido de la relación establecida entre dichos nodos. Si hacemos eso, nuestro grafo quedaría tal y como se ve en la figura 1.8. Eso sí, debemos tener cuidado con el sentido de lectura de la tabla. El sentido natural es empezar por las filas e ir comprobando cada columna. Así, empezamos por la fila superior, la fila de Ana, la primera fila o fila A, y vamos viendo con qué elementos de las restantes columnas tiene la relación de admiración. El sentido de lectura en el caso anterior no era tan importante, gracias a la simetría de la relación con la que se conformaba el grafo, pero en este nuevo caso sí seremos cuidadosos con este detalle.

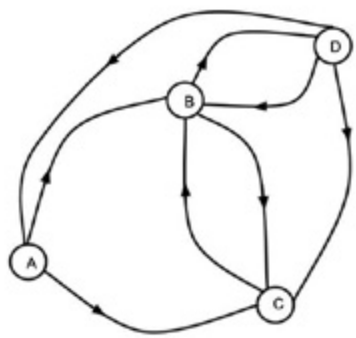

Figura 1.8. Grafo de las relaciones de admiración entre nuestros protagonistas.

No debería sorprender a nadie saber que a este tipo de grafos se les denomine *grafos dirigidos*. Los ejemplos populares que podemos ofrecer son Twitter e Instagram, ya que en ambas redes sociales tú puedes seguir a alguien que no tiene por qué seguirte a ti.

La definición de grafo y sus propiedades son fáciles de enunciar y de entender, lo que lo convierte en un bello campo de las matemáticas. Sin embargo, su potencia a la hora de resolver problemas es una de las maravillas conquistadas por la mente humana. Los grafos se emplean profusamente en sociología, en computación y en el estudio de redes sociales, mercados y empresas, entre muchos otros ámbitos. Desgraciadamente, aún no han logrado introducirse en los temarios de Matemáticas de colegios e institutos, lo cual sería altamente provechoso en pleno siglo XXI.

Un detalle de los grafos: La valencia de un nodo

La teoría de grafos es una monumental obra matemática que no podemos abarcar íntegramente en este libro. Su grado de formalidad y sus requerimientos técnicos pueden ser tan altos como queramos: en ella se necesitan elementos de la teoría de probabilidades, el álgebra, la combinatoria, las funciones generatrices y una larga lista de exquisiteces matemáticas. Dicho en otras palabras: pese a usar abundantes dibujitos, se trata de una matemática tan compleja como la que más. Tal vez te parezca que esta reivindicación nos ha salido de las entrañas y que posiblemente no venía a cuento, pero ahí queda.

Aunque no podemos ahondar en toda la teoría de grafos, sí que vamos a introducir un par de conceptos que nos serán de utilidad en la segunda parte de este libro. Nos referimos a la *valencia —o grado— de un nodo* y a la *valencia media —o grado medio—* de los nodos de un grafo. Para simplificar al máximo la discusión, ahora nos centraremos en grafos no dirigidos. En el siguiente capítulo nos encontraremos con algunas otras ideas fundamentales de la teoría de los grafos y las redes complejas.

Valencia de un nodo

La valencia de un nodo es simplemente el número de aristas que conectan con ese nodo. Más fácil, imposible.

Volvamos a nuestro ejemplo representado en la figura 1.5 y preguntémonos por la valencia del nodo que representa a Berto. Para empezar, conviene que recordemos que a Berto le hemos asignado el nodo identificado con la letra B. Así pues, nos situamos en dicho nodo y contamos las aristas que conectan con el mismo. Esa sería la versión pictórica para calcular la valencia del nodo que representa a Berto. Podríamos también emplear la tabla de relación o la matriz de adyacencia para calcular dicha valencia. En ese caso, lo único que tenemos que hacer es sumar el número de elementos igual a 1 que hay en la segunda fila o en la segunda columna, la que queramos, ya que la tabla es simétrica. Independientemente de cómo lo hagamos, el resultado es siempre el mismo: la valencia del nodo B, que representaremos por k_B, es igual a 2. Por lo tanto, la valencia del nodo B se escribe $k_B = 2$. Podemos verlo en la figura 1.9.

	A	B	C	D
A	0	1	1	0
B	1	0	1	0
C	1	1	0	1
D	0	0	1	0

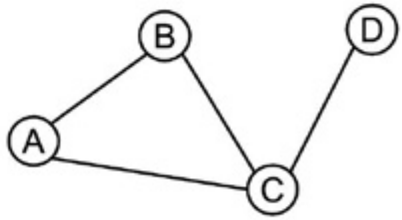

Figura 1.9. Cálculo de la valencia del nodo B de este grafo.

Así podemos hacer una lista de todas las valencias de los nodos de este grafo:

El nodo A tiene valencia 2, $k_A = 2$.
El nodo B tiene valencia 2, $k_B = 2$.
El nodo C tiene valencia 3, $k_C = 3$.
El nodo D tiene valencia 1, $k_D = 1$.

A la vista de esta información, podemos afirmar que el nodo C es el más conectado con esta red o grafo. Por contra, el nodo D es el que menos conexiones ha establecido en la red. En términos de popularidad, considerada simplemente como número de conexiones o valencias, podemos afirmar que en este grafo el nodo C es mucho más popular que el nodo D. De todos modos, la cuestión de la popularidad de un nodo en una red es un tema muy importante, y por tanto lo desarrollaremos con más profundidad en el siguiente capítulo.

Valencia media de los nodos

A veces es interesante saber cuál es la valencia media de los nodos de un grafo. Esta valencia media se calcula simplemente sumando las valencias individuales de cada nodo y dividiendo el resultado por el número total de nodos presentes en el grafo.

En nuestro caso, la valencia media de los nodos del grafo resultaría de sumar $2+2+3+1$ y dividirlo por 4 nodos, que son todos los que existen en la red que estamos estudiando. El resultado de la valencia media de los nodos de nuestro grafo es 2, lo cual se suele representar como $<k>=2$. La información que obtenemos de esto es la conexión típica en el grafo que estamos estudiando.

Para grafos dirigidos, la cuestión es más sutil, ya que para un nodo se puede definir la valencia de entrada —de todas las aristas que apuntan a dicho nodo— y la valencia de salida —de todas las aristas que salen de dicho nodo—. Consecuentemente, se podrá hablar de valencias medias de entrada y de salida. No ahondaremos más en esto porque no emplearemos mucho más los grafos dirigidos, de modo que nos basta con que los conozcas.

Tus amigos tienen más amigos que tú

El título de esta sección hace referencia a la conocida como *paradoja de la amistad*. En lenguaje llano, esta paradoja expresa justamente este hecho: «Tus amigos tienen más amigos que tú. De media».

La afirmación es demoledora, para unos más que para otros, pero no es de extrañar que cuando entramos en una red social como Facebook o Twitter tengamos la sensación de que nuestros amigos son más populares, o bien tienen más amigos en Facebook o más seguidores en Twitter.

Este hecho se ve refrendado por la teoría de grafos, aunque su formulación ha de ser un poco más formal. La paradoja de la amistad se puede expresar del siguiente modo: «El número promedio de amigos de tus amigos es siempre mayor que tu número de amigos en el grafo».

En principio suena un poco a *supercalifragilisticoespialidoso*, pero vamos a analizarlo con más detalle —y un ejemplo— para probar que esta afirmación no tiene nada de paradójica, a poco que indaguemos en ella.

¿Cómo calculamos ese número promedio, la media de amigos de tus amigos? Para ello vamos a seguir los siguientes pasos:

1.- Le pedimos a cada miembro del grupo que nombre a sus amigos. El resultado está en la figura 1.10.

Figura 1.10. Cada nodo nombra a sus amigos.

En total se nombra a 8 amigos. Evidentemente, el nodo C aparece como amigo en 3 ocasiones y el nodo D solo aparece como amigo de alguien en una ocasión. Pero aquí lo que nos interesa es el número total de amigos nombrados por todos los miembros de nuestra red.

2.- Ahora a esos amigos nombrados les pedimos que nos digan cuántos amigos tienen, es decir, les preguntamos por la valencia de su nodo. Esa información aparece en la siguiente figura al lado de cada nodo:

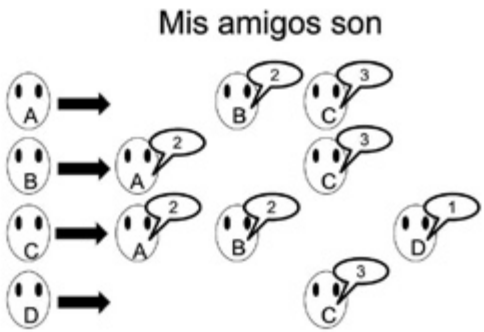

Figura 1.11. Cada amigo de cada nodo nos dice cuántos amigos tiene. Y sí, hay que contarlos cada vez que sean nombrados.

Resulta muy sencillo: tan solo hemos de contar el total de amigos que dicen tener los amigos nombrados anteriormente por los nodos preguntados en primer lugar. Vamos a representarlo en una tabla, pues suele quedar todo más ordenado.

Individuo	N.º de amigos	N.º de amigos de sus amigos	Media de amigos de sus amigos
A	2	2, 3	5/2=2,5
B	2	2, 3	5/2=2,5
C	3	2, 2, 1	5/3=1,6
D	1	3	3/1=3

Como vemos, salvo el individuo C, el resto tiene menos amigos que la media de amigos de sus amigos. Dicho de otra manera, salvo el individuo C, todos están afectados por la paradoja de la amistad. A decir verdad, la paradoja de la amistad afecta a un porcentaje muy alto de nodos del grafo, pero unos cuantos se salvan, y los modernos llaman a estos nodos afortunados *influencers*.

No te preocupes si has llegado hasta este punto y sientes cierto desasosiego. Eso no significa que seas menos popular que tus amigos. Basta que tengas un amigo muy popular entre tus círculos de cualquier red de tu gusto para que sea nombrado muchas veces y haga que se tenga que contar muchas veces su respuesta de entre su propio número de amigos, es decir, su valencia en el nodo. Ese es todo el secreto. Así pues, lo que la paradoja de la amistad implica es que la mayoría de nosotros —salvo los *influencers*— tenemos un amigo —o varios—mucho más popular que nosotros, y es él quien hace que, al calcular la media, esta tenga un valor más alto.

Es imposible comprobar entre todos los seres humanos la hipótesis que estamos discutiendo. Para ello deberíamos tener una base de datos con todos los humanos incluidos y con todos los amigos de todos y cada uno de nosotros. Esa es una tarea que por el momento no está a nuestro alcance. Sin embargo, la aparición de las redes sociales en Internet ha hecho posible que podamos acercarnos cada vez más a esclarecer si esta hipótesis es cierta o no. En 2011 se hizo un estudio en todo Facebook, donde se consideraron 721 millones de usuarios que habían establecido 69 000 millones de amistades. Este trabajo llevado a cabo por Ugander, Karrer, Backstrom y Marlow, todos ellos empleados de Facebook, constató que el 93 % de los usuarios tienen menos amigos que el promedio de amigos de sus amigos. Estimaron que el usuario típico de Facebook tenía un promedio de 190 amigos y que el número promedio de los amigos de sus amigos ascendía a 635. Sin duda, las redes sociales en Internet son un gran laboratorio para comprobar las ideas de la teoría de grafos.

Aunque aún no se haya probado la afirmación de que tus amigos tienen más amigos que tú, en el sentido explicado, todos los estudios con distintos grafos que modelan distintas relaciones parecen indicar que es totalmente cierta.

Este hecho es el fundamento de muchas campañas de venta. El ejemplo típico es la técnica de venta de una conocida marca de fiambreras y utensilios de cocina. Esta técnica consiste en hacer que alguien invite a sus amigos a su casa —en definitiva que nombre a sus amigos— y venderles a estos últimos, de modo que el que ha nombrado recibe regalos simplemente por invitar a sus amigos a su casa. La razón ahora ha de quedar clara, tus amigos tienen más amigos que tú. Todas las campañas de «Trae dos amigos y te sale gratis tal cosa o te regalamos tal o cual otra» se fundamentan en este resultado de la teoría de grafos, lo sepan o no quienes participan en dichas campañas.

Un mundo realmente pequeño

Vivimos en una etapa de la historia donde la globalización campa a sus anchas. Como individuos, estamos más conectados con el resto del mundo que en cualquier otro tiempo pasado. Parece ser como si hoy día pudiéramos contactar con cualquiera en un número muy pequeño de pasos. Simplemente tenemos que encontrar un amigo que conozca a un amigo que conozca a un amigo que…

«Estamos más conectados con el resto del mundo que en cualquier otro tiempo pasado».

Desde finales de la década de los 60 del pasado siglo, se ha puesto sobre la mesa una hipótesis que aún no hemos podido comprobar. La hipótesis en cuestión dice: «Cualquier persona del mundo puede contactar con cualquier otra en 6 pasos como máximo, es decir, con 5 intermediarios o menos».

Esta es la famosa hipótesis de los *seis grados de separación* o del *mundo pequeño*. La idea parece atractiva, pero nos resistimos a aceptarla. ¿Cómo voy a contactar con Obama, por ejemplo, en seis pasos o menos? Sí, cuesta aceptar esa hipótesis sin poner objeción alguna. Pero aquí cabe contar una anécdota que protagonizó Alberto Márquez, matemático español de la Universidad de Sevilla, experto en grafos y geometría computacional, mientras impartía un curso de esta temática.

Al explicar Alberto la hipótesis del mundo pequeño o de los seis grados de separación, un alumno lo retó a demostrar que él, el alumno, estaba conectado con Kim Jong-un, el dictador norcoreano, en seis pasos o menos. Alberto, que sabía que este alumno —de la Universidad de Alicante— jugaba al baloncesto, comenzó un pequeño interrogatorio con una inocente pregunta:

—Juegas al baloncesto, ¿verdad?

La respuesta del alumno fue afirmativa.

A partir de este dato, Alberto hilvanó el siguiente camino hacia Kim Jong-un:

Preguntas de Alberto	Respuestas del alumno
¿Conoces a alguien de la federación valenciana de baloncesto?	Sí
Esa persona, ¿conoce a alguien de la federación española de baloncesto?	Sí
¿Conoce a alguien que juegue en la NBA?	Sí
¿Conoce a alguien que conozca a Dennis Rodman?	Sí 

Demasiado impresionante para nuestro gusto. A nosotros nos da que pensar.

Evidentemente, es imposible comprobar la veracidad de esta hipótesis de los seis grados de separación, porque para ello también deberíamos tener acceso a la mencionada base de datos con todos los seres humanos vivos en este momento y todas sus relaciones de amistad. En efecto, hoy por hoy, eso no es manejable. De hecho, posiblemente ni tú mismo sepas hacer la lista de toda la gente que conoces.

Lo que sí podemos afirmar, como en el caso anterior, es que todos los estudios realizados con poblaciones mucho más pequeñas indican no solo que la idea puede ser acertada, sino que es posible que el número de pasos necesarios para contactar con cualquier persona sea sensiblemente menor que 6. En un estudio llevado a cabo en 2012 en Facebook, derivado del anterior, se dedujo que la separación típica entre cualquier usuario de Facebook con cualquier otro rondaba el 4,74. Es decir, la distancia es menor que 5 y, de hecho, solo se necesitarían 3,74 intermediarios para contactar con cualquiera. Eso nos presenta un mundo mucho más pequeño de lo que cabría esperar. Recordemos que la muestra de usuarios de Facebook equivale a un 10 % de la población mundial actual, lo cual empieza a ser significativo. En 2011, en Twitter, la separación media entre dos usuarios, de los 500 millones de usuarios de esta red social, era de 3,43 usuarios. Interesante. O tal vez no.